Standards for Mathematical Practice

数学実践の基準は全レベルの数学教育者が生徒の中で発達するべき様々な専門知識を記述している。これらの実践は数学教育において重要な”プロセスと熟練”を重視している。これらの１つ目は問題解決、推論および証明、コミュニケーション、表現とコネクションのNCTMのプロセス基準である。２つ目は、国家研究評議会の報告書で特定されている数学的実力の要素である。[適応的推論、戦略的能力、概念的理解（数学的概念、操作および関係の理解）、手続き的な量調整（柔軟かつ正確かつ適切に実行するスキル）、生産的処分（数学を自分自身の効能に対する信念と供に判断力のある、利用できるで価値のあるものと見なした常識的な傾向）]

1）問題を理解し、それらを解く事に励む。

数学的に熟達した生徒は問題の意味を自分に説明し、その解決へのエントリーポイントを探す。生徒たちは既知の事実、制約とゴールを分析する。単に解決を気安く試みるのではなく、解決の形と意味について推測をし、解決への経路を設計する。彼らは、類似した問題を考慮し、その解決に対する洞察を得る為に、元の問題の特殊なケースと単純なフォームを試す。彼らは進捗状況をモニターし、評価しながら必要に応じてコースを変更します。年上の生徒は、問題の文脈に応じて大数式を返還したり、グラフ計算機の表示ウィンドウを変更して、必要な情報を得る事ができる。数学的に熟練している生徒は、方程式、言葉による説明、表、グラフ間の対応や、重要な特徴や関係、グラフデータ、規則性や傾向の検索などの図を描く事ができる。年下の生徒は具体的な画像を使って問題の概念化と解決に頼ることがある。数学的に熟練した生徒は、異なる方法を使って問題への回答をチェックしてから、”これは意味を成すか？と自問し続ける。複雑な問題を解決し、異なるアプローチ間の対応を特定できる。

2）理由は抽象的かつ量的である。

数学的に熟達した生徒は、問題の状況において数量とその関係を理解する。彼らは量的な関係に関連した問題に基づいて２つの補完的能力を備えている。すなわち、特定の状況を抽象化し、それを記号的に表現し、それらが、まるで自分に命があるように、その指示対象に必ずしも従わなくても表現できるようにする能力と、文脈化する能力、関与する記号の対象を調べる為に使う。量的な推論には、問題の一貫した表現を手にするという習慣が伴う。関係している単位を考慮し、数量の意味だけではなく、それらをどのように計算するかにも関わる。操作と物体の様々な特性を把握し、柔軟に使用することができる。

3）実行可能の議論を構築し、他人の推論を批判する。

数学的に熟練した生徒は、前提条件、定義、および以前に確立された結果の理解と使用を通して議論を構築する。生徒達は、彼らの推測の真実を探る為に、論理的なステートメントを構築し推測する。彼らは、ケースへと分割して状況を分析する事ができ、反例を認識して使う事ができる。彼らは自分の結論を正当化し、他者に伝え、他者の主張に応じる。彼らはデータについて誘導的に理由付けを行い、出てきたデータの状況を考慮に入れた妥当な議論を行う。数学的に熟練した生徒は、2つのもっともらしい引数の有効性を比較し、正しい倫理や推論と欠陥のあるものを`区別し、引数に欠陥がある場合はそれが何であるかを説明することもできる。小学生は、物体、ダイアグラム、アクションなどの具体的な指示対象を使って議論を構成できる。そのような議論は、一般化されていなくても、高学年になるまで正式なものにならなくても、意味を成し正しい。その

後、生徒は議論が適用されるドメインを決定することを学ぶ。全学年の生徒は、他の生徒の意見を聞いたり読んだり、意味があるかどうかを判断したり、議論の明確化や改善に役立つ質問をする事ができる。生徒は矛盾により、誘導と証明を構築する。CA 3.1 （より高度な数学の場合のみ）

4）数学を用いたモデル

数学的に熟練した生徒は、日常生活、社会、職場で起きる問題を解決する為に、数学を応用する事ができる。低学年では、状況を説明する為の追加方程式を書くのと同じぐらい簡単かもしれない。中学校では、学校のイベントを企画したり、コミュニティーの問題を分析する為に比例的な推論を適用することがある。高校では、幾何学を使って設計上の問題を解決したり、関心を持っている量が他の量にどのように依存しているかを表す関数を使うことがある。自分の知識を適用できる数学的に熟練した生徒は、複雑な状況を単純化する為に、後に、訂正される可能性があると知りながも、仮定や近似を余裕を持って使う。彼らは実際の状況で重要な数量を特定し、ダイアグラム、双方テーブル、グラフ、フローチャート、公式などのツールを使って、関係を位置づける事ができる。これらの関係を数学的に分析して結論に至る事ができる。彼らは、日欧的に状況の文脈で数学的結果を解釈し、結果が意味を成すかどうかを反映し、その目的を果たしていないモデルを改善使用とする。

5）適切なツールを戦略的に使う。

数学的に熟練した生徒は、数学的問題を解決する際に利用できるツールを検討する。これらのツールは以下の通りである。鉛筆と紙、`具体的なモデル、定規、分度器、電卓、スプレッドシート、コンピューター台数システム、統計パッケージ、またはダイナミック幾何学ソフトウェア。熟練した生徒は、学年やコースに適したツールに十分精通しており、これらのツール各々の有用なタイミングについて妥当な判断を下し、得られる洞察とその限界を認識している。例えば、数学的に熟練した高校生は、関数のグラフを分析し、グラフィング計算機を使って、問題を解く。彼らは、戦略的な推定や、その他の数学的な知識により、起こり得るエラーを検出する。数学的なモデルを作成する際、技術により様々な前提の結果を資格化し、結果を探索し、予測とデータを比較できるようになる事がわかる。様々な学年のレベルにおいて、数学的に熟練した生徒は、ウェブサイトにあるデジタルコンテンツ等の外部の重要な数学的リソースを特定し、それらを使って、問題の提起や、問題を解決することができる。彼らは、技術的ツールを使用して概念を探求し、理解を深める。

6）正確度に注意する。

数学的に熟練した生徒は、他の人と正確にコミュニケーションをとろうとする。彼らは、統合を一貫して適切に使うことを含め、選んだシンボルの意味を述べる。彼らは、単位の指定や、問題の数量との対応を明確にする為の軸のラベル付けに慎重である。彼らは正確かつ効率的に計算し、問題の状況に適した正確度で数値解答を表現する。小学校では、生徒はお互いに注意深く説明し合いをする。高校に入るまでに、彼らは自分の主張を調べ、明示的に定義を使用することを学ぶ。

7）構造を探して利用する。

数学的に熟練した生徒は、模様や構造を見分ける為に注意深く見る。例えば、低学年の生徒は、３の7倍は７の3倍と同じだと気付くかもしれないし、形状の数の変に応じて形状の集合を並べ替えるかもしれない。`その後、学習の準備として、7 x 8が7 x 5+7 x 3と等しいことがわかる。高校生などは、 x2 + 9x + 14の分配性において、高校生などは14を2 x 7だとわかり、9を2+7だとわかる。彼らは、幾何学的図形の既存の線の意義を認識し、補助線を描くストラテジーを使用することができる。彼らは、概要とシフトの視点へと戻る。彼らは、いくつかの大数式のような複雑なものを、単一の対象として、又はいくつかの対象で構成されたものとして見る

事ができる。例えば5 - 3(x - y) 2は正の数から正の数を引いたものを5と見て、それを使ってその実数ｘとｙに対してその値が超えることができない事を認識できる。

8）繰り返しの推論で規則性を探し、表現する。
数学的に熟練した生徒は、計算が繰り返されると気づき、一般的な方法とショートカットの両方を探す。小学校高学年の生徒だと、２５を１１で割る際、同じ計算を何度も繰り返えし、小数点もくり返しと言うことに気付くかもしれない。中学生だと、勾配の計算に注意を払うことによって、ポイントが勾配3で（1、２）を通ってライン上にあるかどうかをくり返しチェックする。彼らは、方程式 (y-2)/(x-1)=3を抽象化するかもしれない。 (x - 1)(x + 1), (x - 1)(x2 + x + 1), と (x - 1)(x3 + x2 + x + 1)を展開すると、それらを幾何学的系列の合計のための一般式に導く。数学的に熟練した生徒は、問題を解く際、詳細に注意を払いながらプロセスの監視を維持する。彼らは、継続的に中間結果の妥当性を評価する。

数学の練習の基準を数学の基準に繋げる。

The Standards for Mathematical Practiceは、数学分野において、小学校、中学校、高校の各年を通して数学の成熟と専門知識の養成にますます重要性を増していく方法で、数学の規律を実践きるような生徒を育成する方法を記述している。カリキュラム、評価、専門的な開発の設計者は、数学の練習の全てを数学指導の内容に繋げる必要がある。

The Standards for Mathematical Contentの基準は、手順と理解のバランスが取れた組み合わせだ。 ”理解する”という言葉で始まる時に持つ期待は、多くの場合、練習をコンテンツに結び付けるには、特に良い機会である。トピックの理解が不十分な生徒は、手続きに頼りすぎる可能性がある。柔軟な基盤がなければ、類似の問題を考えたり、問題を一貫して表現したり、結論を正当化したり、実践的な状況に適用したり、技術を念入りに使ったり、数学を他の学生に正確に説明したり、概要を確認する為に後戻りしたり、既知の手順から逸脱して、近道を見つける事はできない。

要するに、効果的な理解の欠如のせいで、生徒が数学的実践に従事することができない。この点で、理解への期待を設定するこれらのコンテンツの基準は、数学的基準と数学的実践の潜在的な交点”である。これらの交点は、数学においてのカリキュラムの指導、評価、専門的な発達と生徒の達成が、高質で改善する為に必要な時間、リソース、革新的なエネルギーを重視した学校の数学カリキュラムの中心概念と生成概念に重み付けされている。